

第一部分：1~20 小题，每小题 1 分，共 20 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = ( \quad )$

- (A) 0                      (B)  $\frac{1}{2}$                       (C) 1                      (D)  $\frac{3}{2}$

【答案】(B)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ，故选 (B)。

2、极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{3^x + x^2} (3 \sin x + 2 \cos x)$  的值为 ( )。

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3

【答案】(A)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{3^x + x^2} (3 \sin x + 2 \cos x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3^x} (3 \sin x + 2 \cos x) = 0$ ，选 (A)。

3、设函数  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，则  $f(x)$  在  $x=0$  处 ( )

- (A) 极限不存在                      (B) 极限存在但不连续                      (C) 连续但不可导                      (D) 可导

【答案】(A)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x^2}$  不存在，所以函数  $f(x)$  在  $x=0$  处极限不存在，选 (A)。

4、已知  $x=1$  是函数  $y = x^3 + ax^2$  的驻点，则常数  $a = ( \quad )$

- (A) 0                      (B) 1                      (C)  $-\frac{3}{2}$                       (D)  $\frac{3}{2}$

【答案】(C)。

【解析】 $y' = 3x^2 + 2ax$ ， $y'(1) = 3 + 2a = 0$ ，解得  $a = -\frac{3}{2}$ ，选 (C)。

5、设  $f(x) = \arccos x^2$ ，则  $f'(x) = ( \quad )$

(A)  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (B)  $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$  (C)  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$  (D)  $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

【答案】(D)。

【解析】 $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ ，选 (D)。

6、在下列等式中，正确的结果是 ( )

(A)  $\int f'(x)dx = f(x)$  (B)  $\int df(x) = f(x)$   
(C)  $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$  (D)  $d \int f(x)dx = f(x)$

【答案】(C)。

【解析】由不定积分的定义与性质可知  $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = [\int f(x)dx]' = f(x)$ 。

7、已知函数  $y = \ln(1+2x^3)$ ，则  $dy|_{x=0} = ( )$

(A) 0 (B) 1 (C)  $dx$  (D)  $2dx$

【答案】(A)。

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{1+2x^3}$ ，故  $dy|_{x=0} = 0$ ，故选 (A)。

8、设  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ ， $f'''(x_0) > 0$ ，则下列说法正确的是 ( )

- (A)  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极大值  
(B)  $f'(x_0)$  不一定是  $f'(x)$  的极值  
(C)  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值  
(D)  $(x_0, f(x_0))$  是  $f(x)$  的拐点

【答案】(D)。

【解析】由拐点判定的第二充分条件知， $(x_0, f(x_0))$  是  $f(x)$  的拐点，选 (D)。

9、设  $f(x) = \cos x^2$ ，则  $f'(x) = ( )$

- (A)  $\sin x^2$  (B)  $-\sin x^2$  (C)  $2x \sin x^2$  (D)  $-2x \sin x^2$

【答案】(D)。

【解析】根据复合函数求导法则， $f'(x) = -2x \sin x^2$ 。故选 (D)。

10、设  $f(x)$  为连续函数， $I = t \int_0^{\frac{s}{t}} f(tx) dx$ ，其中  $t > 0, s > 0$ ，则  $I$  的值 ( )

- (A) 依赖于  $s, t$  (B) 依赖于  $s, t, x$   
(C) 依赖于  $t, x$ ，不依赖于  $s$  (D) 依赖于  $s$ ，不依赖于  $t$

【答案】(D)。

【解析】 $I = \int_0^{\frac{s}{t}} f(tx) dtx$ ，令  $u = tx$ ，则  $I = \int_0^s f(u) du$ ，所以积分只与  $s$  有关，故选 (D)。

11、设  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3a_{11} & a_{13} & a_{11} + a_{12} \\ 3a_{21} & a_{23} & a_{21} + a_{22} \\ 3a_{31} & a_{33} & a_{31} + a_{32} \end{bmatrix}$ ，且  $|A| = n$ ，则  $|B| =$  ( )

- (A)  $n$  (B)  $-27n$  (C)  $3n$  (D)  $-3n$

【答案】(D)。

【解析】 $|B| = \begin{vmatrix} 3a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ 3a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ 3a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3|A| = -3n$ 。

12、已知线性方程组  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$  则 ( )

(A) 若方程组无解，则必有系数行列式  $|A| = 0$

(B) 若方程组有解，则必有系数行列式  $|A| \neq 0$

(C) 若系数行列式  $|A| = 0$ ，则方程组必无解

(D) 系数行列式  $|A| \neq 0$  是方程组有唯一解的充分非必要条件

【答案】(A)。

【解析】根据克莱姆法则，系数矩阵为方阵的方程组有唯一解的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ ，

方程组有无穷多解或无解的充分必要条件是  $|A|=0$ ，则只有 (A) 选项正确。

13、设  $A$  和  $B$  均为  $n \times n$  矩阵，则必有 ( )

(A)  $|A+B|=|A|+|B|$

(B)  $AB=BA$

(C)  $|AB|=|BA|$

(D)  $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

【答案】(C)。

【解析】 $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$ ，故选项 (C) 正确；

14、已知  $A, B, C$  是同阶方阵，下列说法错误的是 ( )

(A)  $A+B=B+A$

(B)  $(AB)C=A(BC)$

(C)  $(A+B)C=AC+BC$

(D)  $(AB)^2=A^2B^2$

【答案】(D)

【解析】 $(AB)^2=ABAB \neq A^2B^2$ ，故选 (D)。

15、设矩阵  $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，则  $A^{-1}=( )$

(A)  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(B)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(D)  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

【答案】(A)

【解析】矩阵  $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，则有  $|A|=1$ ， $A^*=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，根据公式

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}，选 (A)。$$

16、向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充分条件是 ( )

(A)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  均不为零向量

(B)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意两个向量的分量不成比例

(C)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中任意一个向量均不能由其余  $s-1$  个向量线性表示

(D)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中有一部分向量线性无关

【答案】(C)。

【解析】根据“ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关的充分必要条件是存在某  $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$  可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$  线性表出”这条性质，其逆否命题也正确，所以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关的充分必要条件是任意一个  $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$  均不能由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$  线性表出。故选 (C)。

17、以  $A$  表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件  $\bar{A}$  为 ( )

(A) “甲种产品滞销，乙种产品畅销”

(B) “甲、乙两种产品均畅销”

(C) “甲种产品滞销”

(D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”

【答案】(D)

【解析】设事件  $B$  表示“甲种产品畅销”， $\bar{C}$  表示乙种产品滞销”，则事件  $A$  可表示为  $B\bar{C}$ ，根据对偶律， $\bar{A} = \overline{B\bar{C}} = \bar{B} + C$ ，因此  $\bar{A}$  表示的是甲种产品滞销或乙种产品畅销，答案选 (D)。

18、 $A, B, C$  为随机事件， $A$  发生必导致  $B$  与  $C$  最多有一个发生，则有 ( )

(A)  $A \subset BC$

(B)  $A \subset AC$

(C)  $A \subset \overline{BC}$

(D)  $A \supset \overline{BC}$

【答案】(C)。

【解析】 $B, C$  最多有一个发生，即  $B, C$  不同时发生，即为  $\overline{BC}$  (或  $\bar{B} \cup \bar{C}$ )，故  $A$  发生必导致  $B, C$  最多有一个发生，即  $A \subset \overline{BC}$ ，故选 (C)。

19、设随机事件  $A, B$  互不相容，且  $P(A) > 0, P(B) > 0$ ，则 ( )

(A) 事件  $A, B$  对立

(B) 事件  $\bar{A}, \bar{B}$  互不相容

(C) 事件  $A, B$  不独立

(D) 事件  $A, B$  独立

【答案】(C)。

【解析】由已知， $P(AB) = 0 \neq P(A)P(B)$ ，故事件  $A, B$  不独立。

20、设  $X$  为连续型随机变量，则  $X$  的分布函数为 ( )

- (A) 非阶梯间断函数 (B) 可导函数  
(C) 连续但不一定可导的函数 (D) 阶梯型函数

【答案】(C)。

【解析】根据分布函数的性质，连续型随机变量的分布函数一定连续但不一定可导，故选 (C)。

第二部分：21~60 小题，每小题 1.5 分，共 60 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

21、当  $x \rightarrow 0$  时， $f(x) = x - \sin ax$  与  $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$  是等价无穷小，则 ( )

- (A)  $a = 1, b = -\frac{1}{6}$  (B)  $a = 1, b = \frac{1}{6}$   
(C)  $a = -1, b = -\frac{1}{6}$  (D)  $a = -1, b = \frac{1}{6}$

【答案】(A)。

【解析】由题意知，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x + \frac{1}{6}a^3x^3 + o(x^3)}{-bx^3} = 1, \quad \text{因此,}$$

$$1-a=0, \frac{1}{6}a^3 = -b, \quad \text{故 } a=1, b=-\frac{1}{6}, \quad \text{选 (A).}$$

22、设函数  $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ ，则  $x=0$  为  $f(x)$  的 ( )

- (A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点  
(C) 无穷间断点 (D) 振荡间断点

【答案】(A)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)}{\pi x} = \frac{1}{\pi}$ ，故  $x=0$  为可去间断点，选 (A)。

23、已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导，且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$ ，则  $f'(1) = ( )$

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

【答案】(A)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1$ ，故  $f'(1) = -2$ ，选 (A)。

24、设  $F(x) = \int_0^{\sin x} \ln(1+t)dt$ ，则  $F'(x) = ( \quad )$

- (A)  $\ln(1+x)$  (B)  $\ln(1+\sin x)$  (C)  $\sin x \cdot \ln(1+\sin x)$  (D)  $\cos x \cdot \ln(1+\sin x)$

【答案】(D)。

【解析】 $F'(x) = (\sin x)' \ln(1+\sin x) = \cos x \ln(1+\sin x)$ ，选 (D)。

25、设函数  $y = f(x)$  由方程  $\ln(x+y) = xy$  确定，则  $dy|_{x=0} = ( \quad )$ 。

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】(A)。

【解析】方程两边同时对  $x$  求导， $\frac{1+y'}{x+y} = y + xy'$ ，当  $x=0$  时， $y=1$ ，故  $dy|_{x=0} = 0$ 。

26、设函数  $f(x)$  在  $x=2$  的某邻域内可导，且  $f'(x) = e^{f(x)}$ ， $f(2)=1$ ，则  $f'''(2) = ( \quad )$

- (A)  $e^3$  (B)  $2e^3$  (C)  $e^2$  (D)  $2e^2$

【答案】(B)。

【解析】等式  $f'(x) = e^{f(x)}$  两边同时对  $x$  求导， $f''(x) = e^{f(x)} f'(x)$  ①，因此，

$f''(2) = e^{f(2)} f'(2) = e^2$ ，①式两边同时求导， $f'''(x) = e^{f(x)} f''(x) + e^{f(x)} f'^2(x)$ ，因此，

$f'''(2) = e^{f(2)} f''(2) + e^{f(2)} f'^2(2) = 2e^3$ ，选 (B)。

27、设  $f(x)$  在  $x=0$  处可导，且  $f(0)=0$ ，则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = ( \quad )$

- (A)  $-2f'(0)$  (B)  $-f'(0)$  (C)  $f'(0)$  (D) 0

【答案】(B)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^3)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^3) - 2f(0)}{x^3} = -f'(0)$$
，选 (B)。

28、设  $\int f(x)e^{x^2} dx = e^{x^2} + C$ ，则  $f(x) = ( \quad )$

- (A) 1 (B)  $x^2$  (C)  $e^{x^2}$  (D)  $2x$

【答案】(D)。

【解析】由于  $\int f(x)e^{x^2}dx = e^{x^2} + C$ ，则由原函数定义知： $f(x)e^{x^2} = (e^{x^2} + C)' = 2xe^{x^2}$ ，

从而  $f(x) = 2x$ 。

29、设  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$ ，则 ( )

(A)  $I_1 > I_2 > \frac{\pi}{4}$

(B)  $I_1 > \frac{\pi}{4} > I_2$

(C)  $I_2 > I_1 > \frac{\pi}{4}$

(D)  $I_2 > \frac{\pi}{4} > I_1$

【答案】(B)。

【解析】当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  时,  $\tan x > x > 0$ ， $\frac{\tan x}{x} > 1$ ， $\frac{x}{\tan x} < 1$ ，由定积分的比较定理

可知， $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{\pi}{4} > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx = I_2$ ，故应选 (B)。

30、设函数  $f(x)$  连续，则  $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt =$  ( )

(A)  $xf(x^2)$

(B)  $-xf(x^2)$

(C)  $2xf(x^2)$

(D)  $-2xf(x^2)$

【答案】(A)。

【解析】 $\int_0^x tf(x^2 - t^2)dt \xrightarrow{x^2 - t^2 = u} \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u)du$ ，因此，

$$\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u)du = xf(x^2)，选 (A)。$$

31、 $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx =$  ( )

(A) 1

(B)  $\frac{\pi}{4}$

(C)  $\frac{\pi}{2}$

(D)  $\pi$



【答案】(B)。

【解析】 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx \stackrel{x-1=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$ , 选 (B)。

32、设  $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$ , 则  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = ( \quad )$

(A)  $2x-2$

(B)  $2x+2$

(C)  $x-1$

(D)  $x+1$

【答案】(A)。

【解析】由于  $f(x+y, xy) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ , 则令  $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$  得:

$f(u, v) = u^2 - 2v$ , 从而  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = 2u \\ \frac{\partial f}{\partial v} = -2 \end{cases}$ , 则  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x - 2$ 。故选 (A)。

33、计算三重积分  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = ( \quad )$ , 其中  $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 。

(A)  $\frac{4\pi}{15}$

(B)  $\frac{4\pi}{45}$

(C)  $\frac{\pi}{3}$

(D)  $\frac{2\pi}{3}$

【答案】(A)。

【解析】由轮换对称性可知,  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz$ , 所以,

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin \varphi dr = \frac{4\pi}{15}, \text{ 故选}$$

(A)。

34、设线性无关的函数  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  均是方程  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  的解,

$C_1, C_2$  是任意的常数, 则该方程的通解是 ( )

(A)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$

(B)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$

(C)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$

(D)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

【答案】(D)。

【解析】由于  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3 = C_1 (y_1 - y_3) + C_2 (y_2 - y_3) + y_3$ ，其中  $y_1 - y_3$  和  $y_2 - y_3$  是原方程对应的齐次方程的两个线性无关的解，又  $y_3$  是原方程的解，所以选项 (D) 是原方程的通解。

35、设  $f(x)$  连续，且满足  $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$ ，则  $f(x) =$  ( )

- (A)  $e^{-x} \ln 2$  (B)  $e^{2x} \ln 2$  (C)  $e^x + \ln 2$  (D)  $e^{2x} + \ln 2$

【答案】(B)。

【解析】原方程求导得  $f'(x) = 2f(x)$ ，即  $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2$ ，积分得  $f(x) = Ce^{2x}$ ，又

$f(0) = \ln 2$ ，故  $C = \ln 2$ ，从而  $f(x) = e^{2x} \ln 2$ ，故选 (B)。

36、设  $f(x)$  可导， $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$ ，则  $f(0) = 0$  是  $F(x)$  在  $x = 0$  处可导的 ( )

- (A) 充分必要条件 (B) 充分条件但非必要条件  
(C) 必要条件但非充分 (D) 既非充分条件又非必要条件

【答案】(A)。

【解析】 $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|) = f(x) + f(x)|\sin x|$  可导等价于  $f(x)|\sin x|$  可导

令  $g(x) = f(x)|\sin x|$ ，则

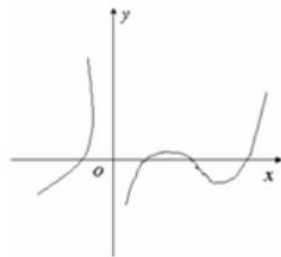
$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)|\sin x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

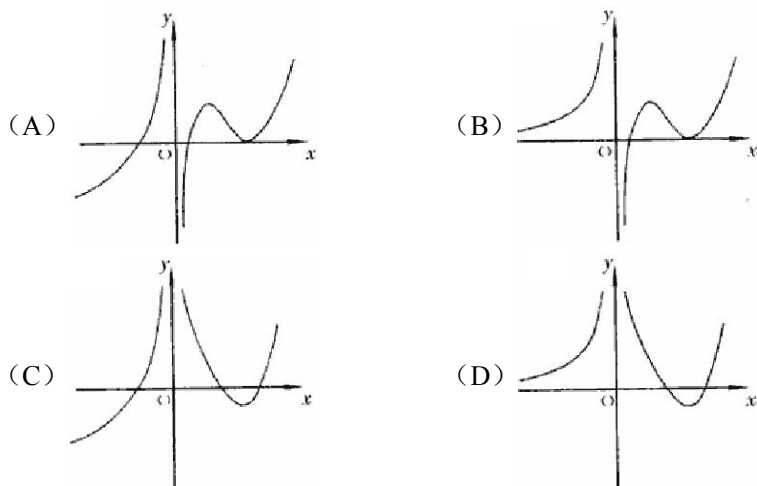
$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)|\sin x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -f(0).$$

$F(x)$  在  $x = 0$  处可导等价于  $g'_+(0) = g'_-(0)$ ，即  $f(0) = 0$ 。故选 (A)。

37、设函数  $f(x)$  在定义域内可导， $y = f(x)$  的图形如图所示，

则导函数  $y = f'(x)$  的图形为 ( )





【答案】(D)。

【解析】根据原函数与导函数关系来判断，

$x < 0$  时，原函数单调递增， $f(x)$  可导，故  $f'(x) > 0$ ；

$x > 0$  时，原函数  $f(x)$ ：增—减—增，故  $f'(x)$ ，正—负—正，故选 (D)。

38、设  $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则 ( )

- (A)  $F(x)$  在  $x = 0$  不连续
- (B)  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续，但在  $x = 0$  处不可导
- (C)  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导，且满足  $F'(x) = f(x)$
- (D)  $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导，但不一定满足  $F'(x) = f(x)$

【答案】(B)。

【解析】。当  $x < 0$  时， $F(x) = \int_0^x (-1)dt = -x$ ；当  $x > 0$  时， $F(x) = \int_0^x 1dt = x$ ，

当  $x = 0$  时， $F(0) = 0$ ，即  $F(x) = |x|$ 。显然， $F(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续。又

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1, \quad F'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1, \quad \text{所以在 } x=0 \text{ 处不可导，故选 (B)。}$$

39、设  $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ ,  $\Sigma_1$  为  $\Sigma$  在第一卦限的部分，则有 ( )

(A)  $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(B)  $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$

$$(C) \iint_{\Sigma} zdS = 4 \iint_{\Sigma_1} zdS$$

$$(D) \iint_{\Sigma} xyzdS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyzdS$$

【答案】(C)。

【解析】 $\Sigma$  关于  $yOz$  面,  $zOx$  面对称,  $f(x, y, z) = z$  关于  $x, y$  都是偶函数, 因此

$$\iint_{\Sigma} zdS = 4 \iint_{\Sigma_1} zdS。$$

40、设方程  $F(x, y, z) = 0$  所确定的函数关系中, 其中  $z = z(x, y)$ , 已知  $\frac{\partial F}{\partial x} = ye^z - e^y$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y - e^z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{y-z} - y}{e^{x-z} - y}, \quad \text{则 } \frac{\partial y}{\partial z} = ( )$$

$$(A) \frac{ye^z - e^x}{e^y - e^z}$$

$$(B) \frac{e^x - ye^z}{e^y - e^z}$$

$$(C) \frac{e^y - e^z}{ye^z - e^x}$$

$$(D) \frac{e^z - e^y}{ye^3 - e^x}$$

【答案】(A)。

【解析】方程  $F(x, y, z) = 0$  两边同时对  $x$  求偏导可得,  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ,

$$\text{从中可得, } \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = -\frac{(ye^z - e^y)(e^{x-z} - y)}{e^{y-z} - y} = e^x - ye^z,$$

再方程  $F(x, y, z) = 0$  两边同时对  $y$  求偏导得,  $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ,

$$\text{故 } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \text{ 所以 } \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{ye^z - e^x}{e^y - e^z}。 \text{ 故选 (A)。}$$

$$41、\text{行列式} \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \text{ 等于 } ( )$$

$$(A) (ad - bc)^2$$

$$(B) -(ad - bc)^2$$

(C)  $a^2d^2 - b^2c^2$

(D)  $-a^2d^2 + b^2c^2$

【答案】(B)。

【解析】

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2。$$

42、行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$  等于 ( )

(A) 48

(B) 24

(C) 16

(D) 8

【答案】(A)

【解析】 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} 2^3 = 48。$

43、设  $A$  为  $n(n \geq 2)$  阶可逆矩阵，则  $(A^{-1})^* = ( )$

(A)  $|A|A^{-1}$

(B)  $|A|A$

(C)  $|A^{-1}|A^{-1}$

(D)  $|A^{-1}|A$

【答案】(D)

【解析】 $(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = |A^{-1}|A$ ，故选项 (D) 正确。

44、设  $\alpha$  为 3 维向量， $\alpha^T$  是  $\alpha$  的转置，若  $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，则  $\alpha^T\alpha = ( )$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

【答案】(C)

【解析】因为  $\alpha$  是三维列向量，因此  $\alpha^T\alpha = \text{tr}(\alpha\alpha^T) = 1+1+1=3$ ，故选 (C)。

45、设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ , 若  $r(A^*) = 1$ , 则  $a = ( \quad )$

- (A) 1 (B) 3 (C) 1或3 (D) 无法确定

【答案】(C)。

【解析】由  $r(A^*) = 1$  得  $r(A) = 3$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{bmatrix}$ ,

则  $a = 1$  或  $3$ , 故选 (C)。

46、设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 则  $A^2$  的秩为 ( )

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【答案】(B)。

【解析】 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 因此,  $r(A^2) = 2$ 。选 (B)。

47、设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是四元非齐次线性方程组  $Ax = b$  的三个解向量, 且  $r(A) = 3$ ,

$\alpha_1 = [1, 2, 3, 4]^T$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3 = [0, 1, 2, 3]^T$ ,  $C$  表示任意常数, 则线性方程组  $Ax = b$  的通解  $x = ( \quad )$

(A)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

【答案】(C)。

【解析】由题意得,  $Ax = 0$  的基础解系中含有  $4 - r(A) = 1$  个线性无关的向量, 且

$A(2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3)) = 0$ , 所以  $2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) = [2, 3, 4, 5]^T$  为基础解系, 所以齐次方程组

的通解为  $k[2, 3, 4, 5]^T + [1, 2, 3, 4]^T$ , 选选项 (C) 正确。

48、矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$  的非零特征值为 ( )

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

【答案】(A)。

【解析】由题意得,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4) = 0$$

所以  $\lambda = 0$  (二重),  $\lambda = 4$ , 故  $A$  的非零特征值为 4。

49、下列矩阵中,  $A$  和  $B$  相似的是 ( )

(A)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (B)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (D)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

【答案】(C)。

【解析】若两矩阵相似, 由性质得两者特征值相同、秩相同、行列式相同、迹相同, 若任意一个不同, 则两矩阵必不相似。

选项 (A),  $r(A) = 1 \neq r(B) = 2$  秩不同;

选项 (B),  $tr(A) = 9 \neq tr(B) = 6$  迹不同;

选项 (D),  $A$  的特征值为  $2, 2, -3$ ,  $B$  的特征值为  $1, 3, -3$ , 特征值不同;

以上三个选项均排除, 故选 (C)。

50、二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$  的矩阵  $A$  是 ( )

$$(A) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & 8 \\ -4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 8 \\ -4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

【答案】(A)。

【解析】 $A$  的主对角线元素  $a_{ii}$  为二次型的平方项  $x_i^2$  前的系数，其余位置的元素  $a_{ij} = a_{ji}$  为  $x_i x_j$  前面系数的  $\frac{1}{2}$ ，可得二次型矩阵  $A$ 。

51、假设随机事件  $A$  与  $B$  独立， $P(A) = P(B)$ ， $A, B$  至少有一个发生的概率为  $\frac{3}{4}$ ，则

$P(A)$  等于 ( )

- (A) 1      (B)  $\frac{1}{2}$       (C)  $\frac{1}{3}$       (D)  $\frac{2}{3}$

【答案】(B)

【解析】 $A$  与  $B$  独立，则  $P(AB) = P(A)P(B)$ ，又由题意可知：

$$\frac{3}{4} = P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 2P(A) - P^2(A), \text{解得 } P(A) = \frac{3}{2} \text{ 或 } P(A) = \frac{1}{2},$$

又因为  $0 \leq P(A) \leq 1$ ，故  $P(A) = \frac{1}{2}$ 。

52、随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ， $Y$  表示对  $X$  的三次独立

重复观测事件  $\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}$  出现的次数，则  $P\{Y=2\} = ( )$

- (A)  $\frac{1}{4}$       (B)  $\frac{1}{16}$       (C)  $\frac{9}{64}$       (D)  $\frac{9}{16}$

【答案】(C)

【解析】：由题意知  $Y \sim B(3, P)$ ，



$$P = P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4}, \text{ 从而 } Y \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right), \text{ 则 } P\{Y=2\} = C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}.$$

53、某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为  $p(0 < p < 1)$ ，则此人第4次射击恰好第2次击中目标的概率为（ ）

- (A)  $3p(1-p)^2$  (B)  $6p(1-p)^2$   
(C)  $3p^2(1-p)^2$  (D)  $6p^2(1-p)^2$

【答案】(C)

【解析】 $P = C_3^1 p(1-p)^2 p = 3p^2(1-p)^2$ ，选 (C)。

54、下列函数中，不能作为随机变量  $X$  的分布函数的是（ ）

- (A)  $F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$  (B)  $F_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$   
(C)  $F_3(x) = \begin{cases} 1 - e^{-8x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  (D)  $F_4(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{1+x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

【答案】(D)

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} F_4(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \neq 1$ ，故  $F_4(x)$  不能作为随机变量  $X$  的分布函数。

55、设随机变量  $X \sim N(1, 4), Y \sim U(0, 4)$  且  $X, Y$  相互独立，则  $D(2X - 3Y) =$ （ ）

- (A) 8 (B) 18 (C) 24 (D) 28

【答案】(D)

【解析】 $X, Y$  相互独立，则  $D(2X - 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot \frac{4^2}{12} = 28$ 。

56、设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，则随  $\sigma$  的增大，概率  $P\{|X - \mu| < \sigma\} =$ （ ）

- (A) 单调增加 (B) 单调减小 (C) 保持不变 (D) 增减不定

【答案】(C)。

【解析】 $P\{|X - \mu| < \sigma\} = P\left\{\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < 1\right\} = 2\Phi(1) - 1$ ，其值与  $\sigma$  的变化没有关系，

故选 (C)。

57、设随机变量  $X$  的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$ ，则  $P\{X=1\}$  为 ( )

- (A) 0                      (B)  $\frac{1}{2}$                       (C)  $\frac{1}{2} - e^{-1}$                       (D)  $1 - e^{-1}$

【答案】(C)

【解析】 $P\{X=1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$ 。

58、设随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ ，且二次方程  $y^2 + 4y + X = 0$  无实根的概率为  $\frac{1}{2}$ ，则  $\mu =$  ( )。

- (A) 0                      (B) 4                      (C) 2                      (D) 3

【答案】(B)

【解析】二次方程无实根的概率为  $p = P\{16 - 4X < 0\} = P\{X > 4\} = \frac{1}{2}$ ，故  $\mu = 4$ ，选 (B)。

59、设  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} axy, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$ ，求  $a$  等于 ( )

- (A) 2                      (B) 4                      (C) 6                      (D) 8

【答案】(D)

【解析】由概率密度性质知  $\iint_{R^2} f(x, y) dx dy = 1$ 。

故  $\iint_{R^2} f(x, y) dx dy = a \int_0^1 dx \int_0^x xy dy = \frac{a}{8} = 1$ ，所以  $a = 8$ 。

60、已知随机变量  $X$  服从二项分布，且  $E(X) = 2.4, D(X) = 1.44$ ，则二项分布的参数  $n, p$  的值为 ( )

- (A)  $n = 4, p = 0.6$                       (B)  $n = 6, p = 0.4$

(C)  $n=8, p=0.3$

(D)  $n=24, p=0.1$

【答案】(B)

【解析】已知  $X$  服从二项分布，则  $E(X)=np=2.4, D(X)=np(1-p)=1.44$ ，从中可解得  $1-p=0.6$ ，故  $p=0.4, n=6$ ，选 (B)。

第三部分：61~70 小题，每小题 2 分，共 20 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

61、设  $x_n \leq a \leq y_n$ ，且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ ，则  $\{x_n\}, \{y_n\}$  ( )

(A) 都收敛于  $a$ (B) 都收敛，但不一定收敛于  $a$ 

(C) 可能收敛，也可能发散

(D) 都发散

【答案】(A)。

【解析】由  $x_n \leq a \leq y_n$  得  $0 \leq a - x_n \leq y_n - x_n$  又  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ ，由夹逼定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a - x_n) = 0, \text{ 即得 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

$$\text{又因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0, \text{ 所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ，故应选 (A)。

62、已知  $f(0)=0$ ，则下列说法中与函数  $f(x)$  在点  $x=0$  处可导等价的是 ( )

(A) 极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((e^h - 1)\sin h)}{h^3}$  存在

(B) 极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos h)}{h^2}$  存在

(C) 极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h)}{h^3}$  存在

(D) 极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h}$  存在

【答案】(C)。

【解析】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h) - f(0)}{h^3}$  存在，易知，此极限满足以下三个

条件：分子一动一定；分母可正可负， $h - \sin h$  与  $h^3$  同阶，故选 (C)。

63、在区间  $[0, 8]$  内，对函数  $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ ，罗尔定理 ( )

(A) 不成立

(B) 成立，并且  $f'(2)=0$ (C) 成立，并且  $f'(4)=0$ (D) 成立，并且  $f'(8)=0$ 

【答案】(C)。

【解析】因为  $f(x)$  在  $[0,8]$  上连续，在  $(0,8)$  内可导，且  $f(0)=f(8)$ ，故  $f(x)$  在  $[0,8]$

上满足罗尔定理条件。又可得  $f'(x) = \frac{8-2x}{3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}}$ ，则  $f'(4)=0$ ，即定理中的  $\xi$  可以

取为 4。故选 (C)。

64、过点  $P(2,0,3)$  且与直线  $\begin{cases} x-2y+4z-7=0, \\ 3x+5y-2z+1=0, \end{cases}$  垂直的平面的方程是 ( )

- (A)  $(x-2)-2(y-0)+4(z-3)=0$   
 (B)  $3(x-2)+5(y-0)-2(z-3)=0$   
 (C)  $-16(x-2)+14(y-0)+11(z-3)=0$   
 (D)  $-16(x+2)+14(y-0)+11(z-3)=0$

【答案】(C)。

【解析】所求平面  $\pi$  的法向量  $n$  可取为已知直线的方向向量，  
 $s = (1, -2, 4) \times (3, 5, -2) = (-16, 14, 11)$ ，故  $\pi$  的方程为  
 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z-3)=0$ 。故选 (C)。

65、当  $|x| < 1$  时，级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  的和函数是 ( )

- (A)  $\ln(1-x)$  (B)  $\ln \frac{1}{1-x}$   
 (C)  $\ln(x-1)$  (D)  $-\ln(x-1)$

【答案】(B)。

【解析】设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$  ( $|x| < 1$ )，则  $S(0)=0$ ，因

$$S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad \text{故}$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt + S(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt + 0 = -\ln(1-x) = \ln \frac{1}{1-x}。 \text{ 故选 (B)。}$$

66、已知线性方程组  $\begin{cases} bx_1 - ax_2 = -2ab, \\ -2cx_2 + 3bx_3 = bc, \\ cx_1 + ax_3 = 0, \end{cases}$  则 ( )

- (A) 当  $a, b, c$  为任意实数时，方程组均有解 (B) 当  $a=0$  时，方程组无解

(C) 当  $b=0$  时, 方程组无解

(D) 当  $c=0$  时, 方程组无解

【答案】(A)。

【解析】当  $a=0$  或  $b=0$  或  $c=0$  时, 方程组均有解, 且系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -5abc, \text{ 当 } abc \neq 0 \text{ 时, 由克莱姆法则知, 方程组有解, 且当}$$

$abc=0$  时有解, 故  $a, b, c$  为任意实数时, 方程组均有解。

67、设  $A$  为 3 阶矩阵,  $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  为可逆矩阵, 使得  $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,

则  $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\quad)$

(A)  $\alpha_1 + \alpha_2$

(B)  $\alpha_2 + 2\alpha_3$

(C)  $\alpha_2 + \alpha_3$

(D)  $\alpha_1 + 2\alpha_2$

【答案】(B)

【解析】 $A(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = AP \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_2 + 2\alpha_3$

68、下列矩阵中不能相似对角化的为 ( )

(A)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

【答案】(B)。

【解析】选项 (B),  $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 3) = 0,$

则  $B$  的特征值  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$ , 其中 0 为二重特征值,  $r(B) = 2$ , 则特征值为 0 时

特征向量个数为  $3 - r(B) = 1 \neq 2$ , 故矩阵  $B$  不可相似对角化, 故选 (B)。

69、设随机变量  $X$  服从参数为 1 的指数分布, 记  $Y = \max\{X, 1\}$ , 则  $E(Y) = (\quad)$

(A) 1

(B)  $1 + e^{-1}$

(C)  $1 - e^{-1}$

(D)  $e^{-1}$

【答案】(B)。

【解析】 $X \sim E(1)$ ，则概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ；而  $Y = \max\{X, 1\}$ ；

$$\text{故 } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{x, 1\} f(x) dx = \int_0^1 1 \cdot e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx = 1 + e^{-1}.$$

70、设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  为来自总体  $N(1, \sigma^2), (\sigma > 0)$  的简单随机样本，则统计量

$$\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \text{ 服从 ( ) 分布}$$

(A)  $N(0, 1)$

(B)  $t(1)$

(C)  $\chi^2(1)$

(D)  $F(1, 1)$

【答案】(B)

【解析】由已知， $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ ， $X_3 + X_4 - 2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ ，

则  $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$ ， $\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$ ， $\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$ ，且  $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$

与  $\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2$  相互独立，

则根据  $t$  分布的构成可知，
$$\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 / 1}} = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \sim t(1)$$
，选 (B)。