

数二专项练习题

第一题：1~9 小题，每小题 1 分，共 9 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = (\quad)$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

【答案】(B)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ，故选 (B)。

2、已知 $x = 1$ 是函数 $y = x^3 + ax^2$ 的驻点，则常数 $a = (\quad)$

- (A) 0 (B) 1 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

【答案】(C)。

【解析】 $y' = 3x^2 + 2ax$ ， $y'(1) = 3 + 2a = 0$ ，解得 $a = -\frac{3}{2}$ ，选 (C)。

3、设 $f(x) = \arccos x^2$ ，则 $f'(x) = (\quad)$

- (A) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ (D) $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

【答案】(D)。

【解析】 $f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ ，选 (D)。

4、在下列等式中，正确的结果是 ()

- (A) $\int f'(x)dx = f(x)$ (B) $\int df(x) = f(x)$
(C) $\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$ (D) $d \int f(x)dx = f(x)$

【答案】(C)。

【解析】由不定积分的定义与性质可知 $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = [\int f(x) dx]' = f(x)$ 。

5、已知函数 $y = \ln(1+2x^3)$ ，则 $dy|_{x=0} = ()$

- (A) 0 (B) 1 (C) dx (D) $2dx$

【答案】(A)。

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{1+2x^3}$ ，故 $dy|_{x=0} = 0$ ，故选 (A)。

6、设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3a_{11} & a_{13} & a_{11}+a_{12} \\ 3a_{21} & a_{23} & a_{21}+a_{22} \\ 3a_{31} & a_{33} & a_{31}+a_{32} \end{bmatrix}$ ，且 $|A| = n$ ，则 $|B| = ()$

- (A) n (B) $-27n$ (C) $3n$ (D) $-3n$

【答案】(D)。

【解析】 $|B| = \begin{vmatrix} 3a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ 3a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ 3a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3|A| = -3n$ 。

7、已知线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$ 则 $()$

(A) 若方程组无解，则必有系数行列式 $|A| = 0$

(B) 若方程组有解，则必有系数行列式 $|A| \neq 0$

(C) 若系数行列式 $|A| = 0$ ，则方程组必无解

(D) 系数行列式 $|A| \neq 0$ 是方程组有唯一解的充分非必要条件

【答案】(A)。

【解析】根据克莱姆法则，系数矩阵为方阵的方程组有唯一解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$ ，

方程组有无穷多解或无解的充分必要条件是 $|A| = 0$ ，则只有 (A) 选项正确。

8、已知 A, B, C 是同阶方阵，下列说法错误的是（ ）

(A) $A + B = B + A$

(B) $(AB)C = A(BC)$

(C) $(A+B)C = AC + BC$

(D) $(AB)^2 = A^2B^2$

【答案】(D)

【解析】 $(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2$ ，故选 (D)。

9、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分条件是（ ）

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均不为零向量

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中有一部分向量线性无关

【答案】(C)。

【解析】根据“ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是存在某 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ 可以由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出”这条性质，其逆否命题也正确，所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是任意一个 $\alpha_i (i=1, 2, \dots, s)$ 均不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出。故选 (C)。

第二题：10~23 小题，每小题 1.5 分，共 21 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

10、设函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ ，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的（ ）

(A) 可去间断点

(B) 跳跃间断点

(C) 无穷间断点

(D) 振荡间断点

【答案】(A)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)}{\pi x} = \frac{1}{\pi}$ ，故 $x=0$ 为可去间断点，选 (A)。

11、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则 $f'(1) = (\quad)$

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

【答案】(A)。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1$, 故 $f'(1) = -2$, 选 (A)。

12、设 $F(x) = \int_0^{\sin x} \ln(1+t) dt$, 则 $F'(x) = (\quad)$

- (A) $\ln(1+x)$ (B) $\ln(1+\sin x)$ (C) $\sin x \cdot \ln(1+\sin x)$ (D) $\cos x \cdot \ln(1+\sin x)$

【答案】(D)。

【解析】 $F'(x) = (\sin x)' \ln(1+\sin x) = \cos x \ln(1+\sin x)$, 选 (D)。

13、设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则 (\quad)

- (A) $I_1 > I_2 > \frac{\pi}{4}$ (B) $I_1 > \frac{\pi}{4} > I_2$

- (C) $I_2 > I_1 > \frac{\pi}{4}$ (D) $I_2 > \frac{\pi}{4} > I_1$

【答案】(B)。

【解析】当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\tan x > x > 0$, $\frac{\tan x}{x} > 1$, $\frac{x}{\tan x} < 1$, 由定积分的比较定理

可知, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{\pi}{4} > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx = I_2$, 故应选 (B)。

14、 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = (\quad)$

- (A) 1 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

【答案】(B)。

【解析】 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx \xrightarrow{x-1=\sin t} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$, 选 (B)。

15、设 $f(x+y, xy) = x^2 + y^2$ ，则 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = (\quad)$

(A) $2x-2$ (B) $2x+2$ (C) $x-1$ (D) $x+1$

【答案】(A)。

【解析】由于 $f(x+y, xy) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ ，则令 $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$ 得：

$f(u, v) = u^2 - 2v$ ，从而 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = 2u \\ \frac{\partial f}{\partial v} = -2 \end{cases}$ ，则 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2x - 2$ 。故选 (A)。

16、设线性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 均是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解，

C_1, C_2 是任意的常数，则该方程的通解是 ()

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$ (B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$ (C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$ (D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

【答案】(D)。

【解析】由于 $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3 = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$ ，其中

$y_1 - y_3$ 和 $y_2 - y_3$ 是原方程对应的齐次方程的两个线性无关的解，又 y_3 是原方程的解，所以选项 (D) 是原方程的通解。

17、设 $f(x)$ 可导， $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$ ，则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的 ()

(A) 充分必要条件

(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分

(D) 既非充分条件又非必要条件

【答案】(A)。

【解析】 $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|) = f(x) + f(x)|\sin x|$ 可导等价于 $f(x)|\sin x|$ 可导

令 $g(x) = f(x)|\sin x|$ ，则

$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)|\sin x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)|\sin x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -f(0)。$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导等价于 $g'_+(0) = g'_-(0)$ ，即 $f(0) = 0$ 。故选 (A)。

18、设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ ， Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分，则有 ()

(A) $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

【答案】(C)。

【解析】 Σ 关于 yOz 面， zOx 面对称， $f(x, y, z) = z$ 关于 x, y 都是偶函数，因此

$$\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS。$$

19、设方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的函数关系中，其中 $z = z(x, y)$ ，已知 $\frac{\partial F}{\partial x} = ye^z - e^y$ ，

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^y - e^z, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{y-z} - y}{e^{x-z} - y}, \quad \text{则 } \frac{\partial y}{\partial z} = ()$$

(A) $\frac{ye^z - e^x}{e^y - e^z}$

(B) $\frac{e^x - ye^z}{e^y - e^z}$

(C) $\frac{e^y - e^z}{ye^z - e^x}$

(D) $\frac{e^z - e^y}{ye^3 - e^x}$

【答案】(A)。

【解析】方程 $F(x, y, z) = 0$ 两边同时对 x 求偏导可得， $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ，

$$\text{从中可得，} \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = -\frac{(ye^z - e^y)(e^{x-z} - y)}{e^{y-z} - y} = e^x - ye^z，$$

再方程 $F(x, y, z) = 0$ 两边同时对 y 求偏导得， $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ，

故 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, 所以 $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{ye^z - e^x}{e^y - e^z}$ 。故选 (A)。

。

20、设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1})^* = (\quad)$

- (A) $|A|A^{-1}$ (B) $|A|A$ (C) $|A^{-1}|A^{-1}$ (D) $|A^{-1}|A$

【答案】(D)

【解析】 $(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = |A^{-1}|A$, 故选项 (D) 正确。

21、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^2 的秩为 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【答案】(B)

【解析】 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 因此, $r(A^2) = 2$ 。选 (B)。

22、矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值为 ()

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

【答案】(A)。

【解析】由题意得,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4) = 0$$

所以 $\lambda = 0$ (二重), $\lambda = 4$, 故 A 的非零特征值为 4。

23、下列矩阵中, A 和 B 相似的是 ()

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(B)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 \text{(C)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(D)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

【答案】(C)。

【解析】若两矩阵相似，由性质得两者特征值相同、秩相同、行列式相同、迹相同，若任意一个不同，则两矩阵必不相似。

选项 (A)， $r(A)=1 \neq r(B)=2$ 秩不同；

选项 (B)， $tr(A)=9 \neq tr(B)=6$ 迹不同；

选项 (D)， A 的特征值为 $2, 2, -3$ ， B 的特征值为 $1, 3, -3$ ，特征值不同；

以上三个选项均排除，故选 (C)。